

# Описание структуры математических объектов

Е. А. Рубцов, email: rea@inistek.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра 319

***Аннотация.** Работа посвящена описанию структур некоторых математических объектов: граф, универсальное множество, булеан, перестановка, размещение, сочетание.*

***Ключевые слова:** модели данных, языки описания данных, структуры, математические объекты, унифицированный язык описания структур.*

## Введение

Структура – упорядоченная совокупность внутренних связей некоторого объекта, основная характеристика системы, ее инвариантный аспект [1]. Идеи унифицированного описания структур различных объектов можно найти в работах [2] и [3]. Одной из реализации этих идей является унифицированный язык описания структур [4]. Унифицированный язык описания структур может быть использован для классификации различных структур по аналогии с используемой в биологии классификацией живых организмов. Данная работа посвящена использованию унифицированного языка описания структур для описания структур некоторых математических объектов.

### 1. Унифицированный язык описания структур

Основная идея языка – представление структуры объектов в виде иерархии элементов структуры, которую можно записать в виде формулы. В случае описания структуры нескольких одинаковых объектов каждый элемент структуры имеет смысловую нагрузку, а в случае описания структуры конкретного объекта – числовые характеристики. Неделимый в рамках описания элемент структуры называется атомарным и обозначается буквой **a**. Множество атомарных элементов обозначается **am**. Список атомарных элементов обозначается **as**. Отличия между множеством и списком отображены в таблице 1. Список атомарных элементов, внутри которого все элементы уникальны, обозначается **as** (буква *s* набрана курсивом). Группа атомарных элементов, без уточнения множество это или список, обозначается **ax**. Множество множеств атомарных элементов

обозначается **амм**. Список множеств атомарных элементов обозначается **амс**. Список списков атомарных элементов обозначается **асс**. Множество списков атомарных элементов обозначается **асм** и т.д.

Таблица 1

*Отличия между множеством и списком*

<b>Множество</b>	<b>Список</b>
Все элементы уникальны.	Элементы могут повторяться.
Элементы неупорядочены.	Элементы упорядочены.
Максимальный размер равен множеству вещественных чисел.	Максимальный размер равен множеству натуральных чисел.

Полное множество всех возможных с учетом внутренней структуры элементов обозначается буквой **М**, например **аМ** – множество всех атомарных элементов.

Нижний индекс у элемента **а** обозначает максимальное количество различных атомарных элементов, которые могут присутствовать в объекта. Нижний индекс у элемента **м** обозначает мощность множества. Нижний индекс у элементов **с** и **о** обозначает длину списка. Нижний индекс у элемента **х** означает размер группы: мощность для множества или длину для списка. Нижний индекс может быть задан числом, открытым, закрытым или полуоткрытым интервалом, либо перечнем допустимых значений. Если нижний индекс начинается с символа **=**, то после него идет математическая формула, при помощи которой можно рассчитать значение нижнего индекса.

Верхний индекс у любого элемента означает повтор в формуле данного элемента заданного количества раз и является формой краткой записи формулы.

Структура языка в нотации диаграммы структур данных [5] представлена на рис. 1.

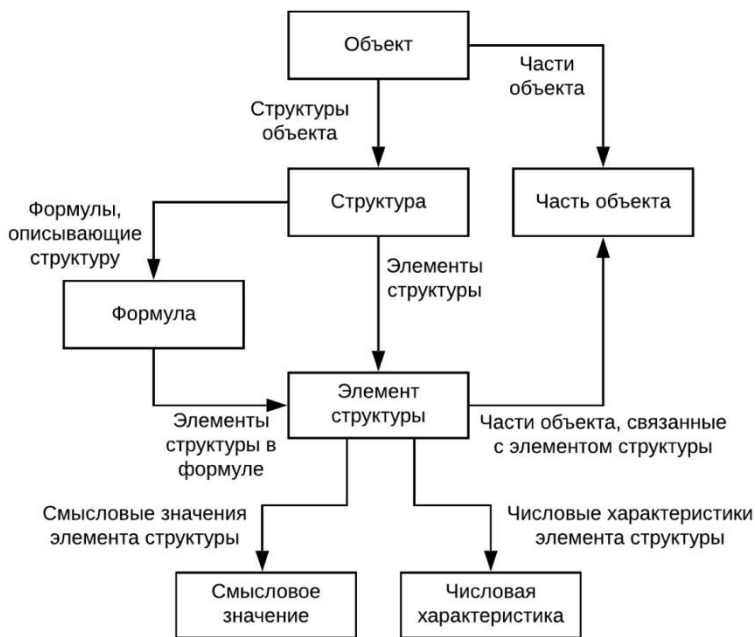


Рис. 1. Структура языка

## 2. Граф

Граф – это множество вершин и набор неупорядоченных и упорядоченных пар вершин [6]. Неупорядоченная пара вершин называется ребром, упорядоченная пара – дугой. Граф, содержащий только ребра, называется неориентированным. Граф, содержащий только дуги, – ориентированным. Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами (дугами одного направления), такие ребра (дуги) называются кратными. Дуга (или ребро) может начинаться и кончаться в одной и той же вершине, такая дуга (ребро) называется петлей.

В качестве атомарного элемента при описании структуры графа можно выбрать вершину. Тогда ребро – это множество из двух вершин, а дуга – это список из двух вершин. Граф в целом – это множество, которое содержит в себе дуги и ребра. Формула структуры графа с  $n$  вершинами представлена на рис. 2.

$$a_n X_2 M$$

*Рис. 2.* Формула структуры графа с  $n$  вершинами

### 3. Универсальное множество

Универсальное множество – некоторое множество, фиксированное в рамках данной математической теории и содержащее в качестве элементов все объекты, рассматриваемые в этой теории [6].

В качестве атомарного элемента при описании структуры универсального множества можно выбрать объект, рассматриваемый в рамках математической теории. Тогда само универсальное множество можно представить в виде множества всех атомарных элементов. Формула структуры универсального множества с  $n$  элементами представлена на рис. 3.

$$a_n M = n$$

*Рис. 3.* Формула структуры универсального множества, состоящего из  $n$  различных элементов

### 4. Булеан

Булеан – множество всех подмножеств данного множества.

В качестве атомарного элемента при описании структуры булеана можно выбрать элемент исходного множества. Произвольное подмножество исходного множества можно представить в виде множества атомарных элементов. Булеан в этом случае можно представить как множество всех возможных подмножеств исходного множества. Формула структуры булеана множества с  $n$  элементами представлена на рис. 4.

$$a_n M M = 2^n$$

*Рис. 4.* Формула структуры универсального множества, состоящего из  $n$  различных элементов

### 5. Перестановка

Перестановка – конечная последовательность длины  $n$ , все элементы которой различны.

Число всех возможных перестановок из  $n$  элементов равно  $n!$ .

В качестве атомарного элемента при описании структуры перестановки длины  $n$  можно выбрать элемент конечной последовательности. Тогда саму перестановку можно представить в виде списка длины  $n$ , все элементы которого уникальны. Все возможные перестановки из  $n$  элементов можно представить в виде множества всех возможных списков длины  $n$ , все элементы которых уникальны. Формула структуры всех возможных перестановок из  $n$  элементов представлена на рис. 5.

$$a_n C_n M_{=n}!$$

Рис. 5. Формула структуры всех возможных перестановок из  $n$  элементов

## 6. Размещение

Размещение с повторениями из  $n$  по  $k$  – конечная последовательность  $k$  элементов некоторого множества из  $n$  элементов [6].

Если все члены конечной последовательности различны, то размещение называют размещением без повторений.

Число всех возможных размещений с повторениями из  $n$  по  $k$  равно  $n^k$ .

Число всех возможных размещений без повторений из  $n$  по  $k$  равно  $n!/(n-k)!$ .

В качестве атомарного элемента при описании структуры размещения можно выбрать элемент исходного множества мощностью  $n$ . Тогда размещение с повторениями можно представить в виде списка длины  $k$ , а размещение без повторений можно представить в виде списка длины  $k$ , все элементы которого уникальны. Все возможные размещения с повторениями из  $n$  по  $k$  можно представить в виде множества всех возможных списков длины  $k$ . Все возможные размещения без повторений из  $n$  по  $k$  можно представить в виде множества всех возможных списков длины  $k$ , все элементы которых уникальны. Формула структуры всех возможных размещений с повторениями из  $n$  по  $k$  представлена на рис. 6. Формула структуры всех возможных размещений без повторений из  $n$  по  $k$  представлена на рис. 7.

$$a_n c_k M_{=n}^k$$

*Рис. 6.* Формула структуры всех возможных размещений с повторениями из  $n$  по  $k$

$$a_n c_k M_{=n}! / (n-k) !$$

*Рис. 7.* Формула структуры всех возможных размещений без повторений из  $n$  по  $k$

### 7. Сочетание

Сочетание из  $n$  по  $k$  – подмножество мощности  $k$  некоторого исходного конечного множества мощности  $n$ .

Число всех возможных сочетаний из  $n$  по  $k$  равно  $n! / (k! * (n-k)!)$ .

В качестве атомарного элемента при описании структуры сочетания из  $n$  по  $k$  можно выбрать элемент исходного конечного множества. Тогда сочетание можно представить в виде множества мощности  $k$ . Все возможные сочетания из  $n$  по  $k$  можно представить в виде множества всех возможных множеств мощности  $k$  атомарных элементов. Формула структуры всех возможных сочетаний из  $n$  по  $k$  представлена на рис. 8.

$$a_n m_k M_{=n}! / (k! * (n-k) !)$$

*Рис. 8.* Формула структуры всех возможных сочетаний из  $n$  по  $k$

### 8. Объект комбинаторики

Структуру таких объектов комбинаторики как перестановка, размещение и сочетание можно описать при помощи одной общей формулы, в которой вместо символов  $c$ ,  $s$  и  $m$  будет использован символ  $x$ . Общая формула структуры перечисленных ранее объектов комбинаторики представлена на рис. 9.

$$a_n x_k M$$

*Рис. 9.* Формула структуры объектов комбинаторики

## 9. Представление структуры конкретного объекта

Для представления структуры конкретного объекта в рамках унифицированного языка описания структур используются круглые скобки для обозначения списка и фигурные скобки для обозначения множеств. Элементы списков и множеств разделяются запятыми.

На рис. 10 представлена структура булеана множества  $\{1, 2, 3\}$ .

$$\{ \{ \} , \{ 1 \} , \{ 2 \} , \{ 3 \} , \\ \{ 1 , 2 \} , \{ 1 , 3 \} , \{ 2 , 3 \} , \\ \{ 1 , 2 , 3 \} \}$$

*Рис. 10.* Структура булеана множества  $\{1, 2, 3\}$

На рис. 11 представлена структура всех перестановок для последовательности, состоящей из цифр 1, 2, 3.

$$\{ ( 1 , 2 , 3 ) , ( 1 , 3 , 2 ) , \\ ( 2 , 1 , 3 ) , ( 2 , 3 , 1 ) , \\ ( 3 , 1 , 2 ) , ( 3 , 2 , 1 ) \}$$

*Рис. 11.* Структура всех перестановок для последовательности, состоящей из цифр 1, 2, 3

На рис. 12 представлена структура всех размещений с повторениями из 3 по 2 для множества  $\{1, 2, 3\}$ .

На рис. 13 представлена структура всех размещений без повторений из 3 по 2 для множества  $\{1, 2, 3\}$ .

На рис. 14 представлена структура всех сочетаний из 3 по 2 для множества  $\{1, 2, 3\}$ .

$$\{ (1, 1) , (1, 2) , (1, 3) , \\ (2, 1) , (2, 2) , (2, 3) , \\ (3, 1) , (3, 2) , (3, 3) \}$$

*Рис. 12.* Структура всех размещений с повторениями из 3 по 2 для множества {1, 2, 3}

$$\{ (1, 2) , (1, 3) , \\ (2, 1) , (2, 3) , \\ (3, 1) , (3, 2) \}$$

*Рис. 13.* Структура всех размещений без повторений из 3 по 2 для множества {1, 2, 3}

$$\{ \{1, 2\} , \\ \{1, 3\} , \\ \{2, 3\} \}$$

*Рис. 14.* Структура всех сочетания из 3 по 2 для множества {1, 2, 3}

### **Заключение**

При помощи унифицированного языка описания структур было выполнено описание структур таких математических объектов как граф, универсальное множество, булеан, перестановка, размещение с повторениями, размещение без повторений, сочетание, объект комбинаторики. Были приведены примеры описания структур конкретных объектов.

### **Список литературы**

1. Гуманитарная энциклопедия [Электронный ресурс] : структура. – Режим доступа: <https://gtmarket.ru/concepts/7096/>



2. Рубцов, Е.А. Об одном подходе к описанию информационных структур / Е. А. Рубцов // XVIII Межд. конф. «Информатика: проблемы, методология, технологии» (IPMT-2018), 7 том (Воронеж, 8-9 февраля 2018 г.). – Воронеж, 2018. – С. 64-69.

3. Рубцов, Е.А. Унифицированный метод описания структурированных объектов / Е. А. Рубцов // Материалы XIX Межд. конф. «Информатика: проблемы, методология, технологии» (IPMT-2019), (Воронеж, 14-15 февраля 2019 г.). – Воронеж, 2019. – С. 984-988.

4. Рубцов, Е.А. Унифицированный язык описания структур / Е. А. Рубцов // Материалы участников XX Межд. конф. «Информатика: проблемы, методология, технологии» (IPMT-2020), (Воронеж, 13-14 февраля 2020 г.). – Воронеж, 2020. – С. 1283-1291.

5. Bachman, C.W. Data structure diagrams / C.W. Bachman // ACM SIGMIS Database: the DATABASE for Advances in Information Systems. – Summer 1969. – Volume 1, Issue 2. – pp 4-10.

6. Математическая энциклопедия [Электронный ресурс] : словари и энциклопедии – Режим доступа: [http://endic.ru/enc\\_math/](http://endic.ru/enc_math/)